$\boxed{1}$ （解答例）

(1) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(2+k)x^2+6kx$ について，$k=1$ のとき，$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x$ となる。

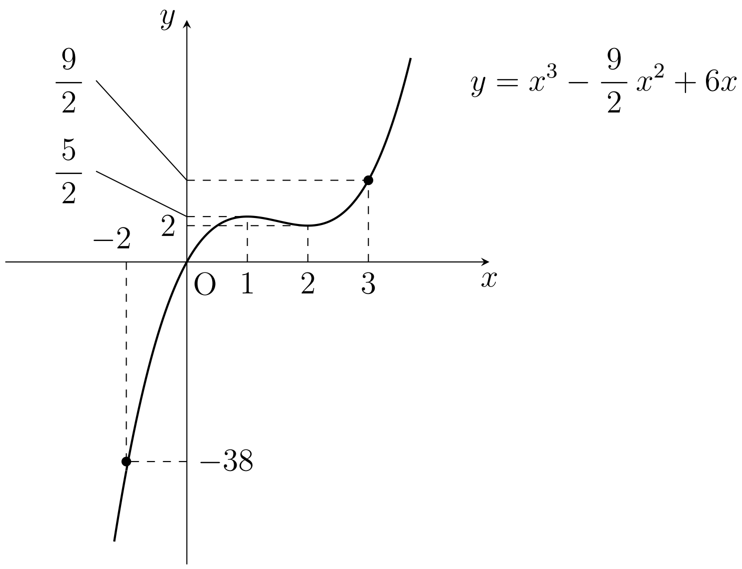
$$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{ となる } x \text{ は} \qquad x=1,\ 2$$

よって，$y=f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$

したがって，この関数のグラフは下図の実線部分である。



このグラフを $-2 \leqq x \leqq 3$ の範囲で考えると，$f(1)=\dfrac{5}{2}$ より $f(3)=\dfrac{9}{2}$ の方が大きいので，$x=3$ のとき，最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとる。

(2) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(2+k)x^2+6kx$ について，

$$f'(x)=3x^2-3(2+k)x+6k=3(x-2)(x-k)$$

$$f'(x)=0 \text{ となる } x \text{ は} \qquad x=2,\ k$$

$k>2$ より，$y=f(x)$ の区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ における最大値の候補は

$$f(2)=6k-4 \quad \text{または} \quad f(3)=\frac{9}{2}k$$

である。ただし，$f(2)=f(3)$ となる k は

$$6k-4=\frac{9}{2}k \quad \text{より} \quad k=\frac{8}{3}$$

よって，k の値で場合分けして考えると，最大値は次のようになる。

〔1〕 $2 < k < \dfrac{8}{3}$ のとき

この関数のグラフは図〔1〕の実線部分である。

$$6k - 4 < \frac{9}{2}k$$

より，$x = 3$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}k$ をとる。

〔2〕 $k = \dfrac{8}{3}$ のとき

この関数のグラフは図〔2〕の実線部分である。

$$6k - 4 = \frac{9}{2}k = 12$$

より，$x = 2,\ 3$ のとき最大値 12 をとる。

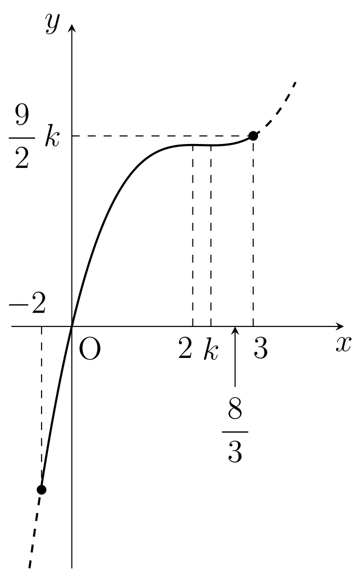
〔3〕 $\dfrac{8}{3} < k$ のとき

この関数のグラフは図〔3〕の実線部分である。

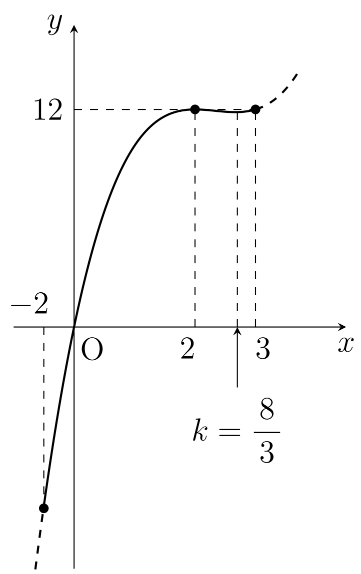
$$6k - 4 > \frac{9}{2}k$$

より，$x = 2$ のとき最大値 $6k - 4$ をとる。

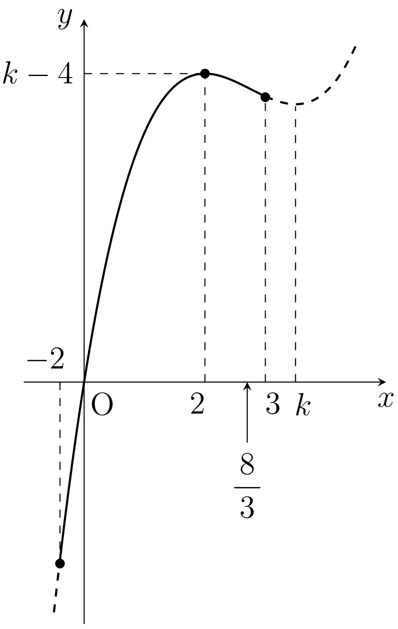
〔1〕



〔2〕



〔3〕



〔1〕,〔2〕,〔3〕より，

$$\begin{cases} 2 < k < \dfrac{8}{3} \text{ のとき} & x = 3 \text{ で最大値 } \dfrac{9}{2}k \\ k = \dfrac{8}{3} \text{ のとき} & x = 2,\ 3 \text{ で最大値 } 12 \\ \dfrac{8}{3} < k \text{ のとき} & x = 2 \text{ で最大値 } 6k - 4 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ （解答例）

(1) K, A, I, Y, O, D, A, I の 8 文字のうち A，I は 2 個ずつあるから，求める順列の総数は

$$\frac{8!}{2!\,2!} = 10080$$

(2) 隣り合って並ぶ AA をまとめて A′，II をまとめて I′ で表す。このとき，

〔1〕 A′, K, I, Y, O, D, I の並べ方は $\dfrac{7!}{2!} = 2520$ 通り

〔2〕 I′, K, A, Y, O, D, A の並べ方は $\dfrac{7!}{2!} = 2520$ 通り

〔3〕 A′, I′, K, Y, O, D の並べ方は $6! = 720$ 通り

〔1〕,〔2〕,〔3〕より，求める順列の総数は

$$2520 \times 2 - 720 = 4320$$

(3) 例えば，

$$\boxed{?}\ \mathrm{A}\ \boxed{?}\ \mathrm{A}\ \boxed{?}\ \mathrm{I}\ \boxed{?}\ \mathrm{I}\ \boxed{?}\ \mathrm{O}\ \boxed{?}$$

といった文字列に対し，6 個の $\boxed{?}$ から左から 3 個の $\boxed{?}$ を選んで，K, Y, D を入れると，どの子音も隣り合わない文字列 KAYADIIO ができる。

6 個の $\boxed{?}$ から 3 個の $\boxed{?}$ の選び方は ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り

A, A, I, I, O の並べ方は $\dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$ 通り

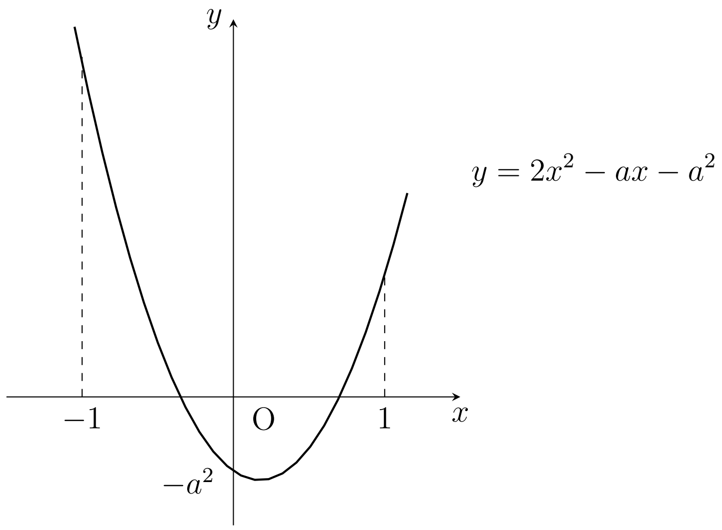
$\boxed{?}$ に入れる K, Y, D の並べ方は $3! = 6$ 通り

よって，求める順列の総数は

$$20 \times 30 \times 6 = 3600$$

$\boxed{3}$ （解答例）

例えば，$a>0$ のときの $y=2x^2-ax-a^2$ のグラフは，下図のようになる。($a \leqq 0$ の場合もある)



(1) $f(x) = 2x^2-ax-a^2$ について，$f(0)=-a^2 \leqq 0$ より，$f(x)=0$ のすべての解が $-1 \leqq x \leqq 1$ にあるためには，$f(1) \geqq 0$ かつ $f(-1) \geqq 0$ であればよい。

$$f(1) = 2-a-a^2 \geqq 0 \quad のとき，-2 \leqq a \leqq 1$$

$$f(-1) = 2+a-a^2 \geqq 0 \quad のとき，-1 \leqq a \leqq 2$$

よって，求める a の範囲は $-1 \leqq a \leqq 1$ となる。

(2) $f(x)=2x^2-ax-a^2=(x-a)(2x+a)=0$ の解を α，β ($\alpha \leqq \beta$) とおくと，

$$\beta-\alpha = \left|a-\left(-\frac{a}{2}\right)\right| = \frac{3}{2}\,|a| \quad \cdots ①$$

となる。ただし，(1) より $|a| \leqq 1$ である。これより，

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx \\
&= \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{1} f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{1} (2x^2-a^2)\,dx - 4\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= 2\left[\frac{2}{3}\,x^3 - a^2x\right]_0^1 + 4\cdot\frac{1}{6}\,(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{4}{3} - 2a^2 + \frac{9}{4}\,|a|^3 \qquad (①\text{ を代入した})
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ （解答例）

(1) xy 平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\,0)$，$\mathrm{B}(1,\,0)$ に対して，点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ が条件

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:1 \quad (m>0)$$

を満たしながら動くとき，

$$\begin{aligned} & \mathrm{AP}=m\mathrm{BP} \quad (m>0) \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{AP}^2=m^2\mathrm{BP}^2 \\ \Longleftrightarrow\ & (x+1)^2+y^2=m^2\left\{(x-1)^2+y^2\right\} \\ \Longleftrightarrow\ & (m^2-1)\,x^2-2\,(m^2+1)\,x+(m^2-1)\,y^2+m^2-1=0 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

〔1〕$m=1$ のとき，① より，$-4x=0$　よって，　$x=0$　$\cdots$②

〔2〕$m\neq 1$（$m>0$）のとき，① より，

$$\left(x-\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2-1=\frac{4m^2}{(m^2-1)^2} \quad \cdots ③$$

〔1〕,〔2〕より，点 P は $m=1$ のときは直線 ② 上にあり，それ以外のときは円 ③ の周上にある。逆に，直線 ② 上，または円 ③ の周上の任意の点は条件を満たす。
よって，求める軌跡は，

$m=1$ のとき，直線 $x=0$

$m\neq 1\,(m>0)$ のとき，中心が点 $\left(\dfrac{m^2+1}{m^2-1},\,0\right)$，半径が $\dfrac{2m}{|m^2-1|}$ の円

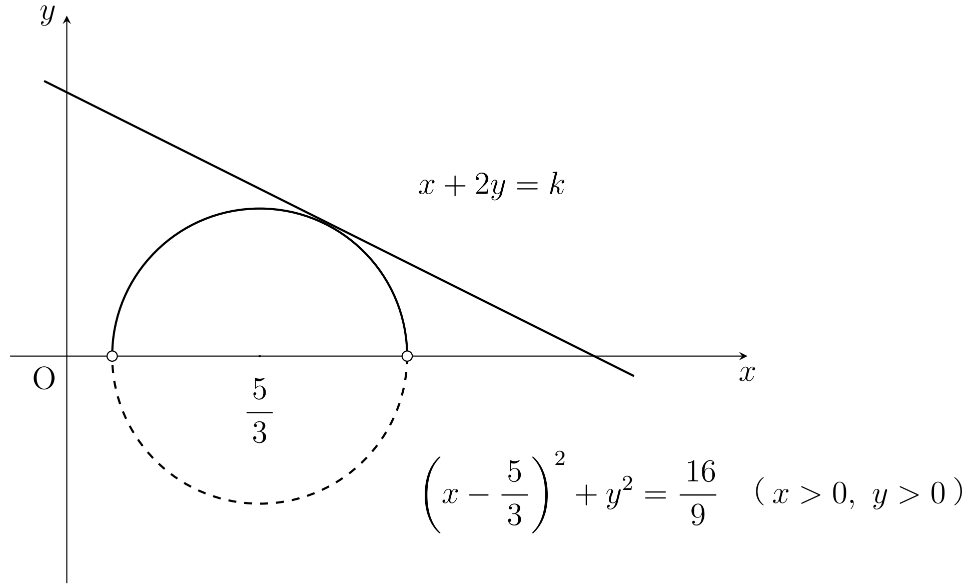
(2) $m=2$ のとき，③ より，

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9} \quad \cdots ④$$

$x>0$，$y>0$ のとき，

$$x+2y=k \quad \cdots ⑤$$

とおくと，k が最大となるのは，下図のように直線 ⑤ が円 ④ と第 1 象限で接するときである。



よって，求める k は，点と直線の距離の公式より，

$$\frac{\left|\frac{5}{3}+2\cdot 0-k\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{4}{3} \qquad \text{よって，} \quad \left|\frac{5}{3}-k\right|=\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$k>0$ に注意して，$k=\dfrac{5+4\sqrt{5}}{3}$ となる。

$\boxed{5}$ （解答例）

n は正の整数とする。$P(n)=n^4+2$，$Q(n)=n^2+2$ のとき，

$$P(n)=Q(n)(n^2-2)+6$$

より，$P(n)$ と $Q(n)$ の最大公約数 $G(n)$ は 6 の約数となる。よって，$G(n)$ は n によって，1, 2, 3, 6 のいずれかとなる。ただし，$n=1$ のときは，具体的に $P(1)=1^4+2=3$，$Q(1)=1^2+1=3$ から $G(1)=3$ が得られるので，以下は $n \geqq 2$ の場合について考え，n が 2 の倍数または 3 の倍数かどうかで場合分けして調べる。

〔1〕n が 2 の倍数かどうかで場合分けする。k を正の整数とすると，

(i) $n=2k$ のとき，$Q(n)=2\,(2k^2+1)$ より 2 の倍数。

(ii) $n=2k+1$ のとき，$Q(n)=2\,(2k^2+2k+1)+1$ より 2 の倍数でない。

よって，$P(n)$ と $Q(n)$ は，n が 2 の倍数のときは 2 を公約数にもち，n が 2 の倍数でないときは 2 を公約数にもたない。

〔2〕n が 3 の倍数かどうかで場合分けする。k を正の整数とすると，

(i) $n=3k$ のとき，$Q(n)=9k^2+2$ より 3 の倍数でない。

(ii) $n=3k+1$ のとき，$Q(n)=3\,(3k^2+2k+1)$ より 3 の倍数である。

(iii) $n=3k+2$ のとき，$Q(n)=3\,(3k^2+4k+2)$ より 3 の倍数である。

よって，$P(n)$ と $Q(n)$ は，n が 3 の倍数のときは 3 を公約数にもたず，n が 3 の倍数でないときは 3 を公約数にもつ。

〔1〕,〔2〕より，求める $G(n)$ を表で整理すると，

	n が 3 の倍数である	n が 3 の倍数でない
n が 2 の倍数である	2	6
n が 2 の倍数でない	1	3

となる。