数　　　　学 (120分)

（令和6年度　前期日程）

注 意 事 項

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．この冊子は全部で9ページから成っています。表紙を開くと白紙があります。さらに，その白紙を開いた左のページから1ページ目の問題がはじまります。印刷が不鮮明な場合，又はページの脱落に気付いたときは，申し出てください。

3．解答用紙は4枚です。

4．解答は必ず解答用紙の指定された欄に記入してください。(裏面は使用しないこと。)

5．解答用紙には必ず受験番号，氏名を記入してください。記入を忘れたとき，あるいは誤った番号を記入したときは失格となることがあります。

6．解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。

7．数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B を選択する者は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4-\text{I}}$を，数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B を選択する者は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4-\text{II}}$ を解答してください。$\boxed{4-\text{I}}$, $\boxed{4-\text{II}}$ については解答用紙の指示に従い，解答するほうを○で囲んでください。

8．解答は100点満点で採点され，海事システム工学科と海洋電子機械工学科は採点結果の3倍が，流通情報工学科は採点結果の2倍が得点になります。

9．試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ （配点 25 点）

a を正の実数とし，関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x$ を考える．

(1) b を実数とする．$f(1) > b$ が成り立つ点 (a, b) の領域 S_1 を図示せよ．

(2) x の方程式 $f(x) = b$ が 3 つの相異なる実数解をもつ点 (a, b) の領域 S_2 を図示せよ．

2 （配点 25 点）

自然数 n に対し，

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

(1) $n=1,2,3,\cdots$ に対し，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対し，$\left(3-2\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $a_n^2-2b_n^2$ は n によらない定数であることを示せ．

(4) (3) の定数を α とするとき，

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{k_n}+\sqrt{k_n-\alpha}, \qquad \left(3-2\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{k_n}-\sqrt{k_n-\alpha}$$

を満たす自然数 k_n $(n=1,2,3,\cdots)$ が存在することを示せ．

3　（配点 25 点）

a を $0 < a < 1$ を満たす定数とする．θ の関数

$$f(\theta) = 2\cos 2\theta - 6a\cos\theta - 3a + 5$$

を考える．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1)　$x = \cos\theta$ とおく．$f(\theta)$ を x を用いて表せ．

(2)　$f(\theta)$ の最大値，最小値，およびそのときの $\cos\theta$ の値を a を用いて表せ．

(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ におけるすべての θ に対して $f(\theta) > 0$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

(4)　$f(\theta) = 0$ を満たす θ の個数を，a の値により場合分けして求めよ．

4-I （配点 25 点）

図のような正六角錐 G−ABCDEF を考える．ここで底面 ABCDEF は，点 H を中心とする半径 1 の円に内接する正六角形である．また，直線 GH は平面 ABCDEF と直交し，$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}| = \sqrt{3}$ であるとする．

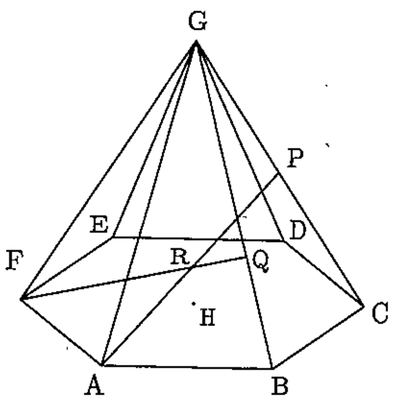
辺 GC の中点を P とし，辺 GB 上の点 Q を，直線 AP と 直線 FQ が交点をもつようにとる．その交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \vec{c}$ とおく．

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$，$\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(4) 平面 ABCDEF 上に点 I を，直線 RI が平面 ABCDEF と直交するようにとる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{RI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



4 - II （配点 25 点）

a を実数とする．座標平面上の曲線 C_1： $y = a\sqrt{x}$ と曲線 C_2： $y = \log x$ を考える．

(1) t を正の実数とする．C_1 の点 $(t, a\sqrt{t})$ における接線の方程式および，C_2 の点 $(t, \log t)$ における接線の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) C_1 と C_2 がある点において共通の接線をもつときの a の値を求めよ．

(3) (2) の a に対し，$x > 0$ のとき，$a\sqrt{x} \geqq \log x$ が成り立つことを示せ．

(4) (2) の a に対し，C_1, C_2 および直線 $x = e^4$ で囲まれる図形の面積を求めよ．