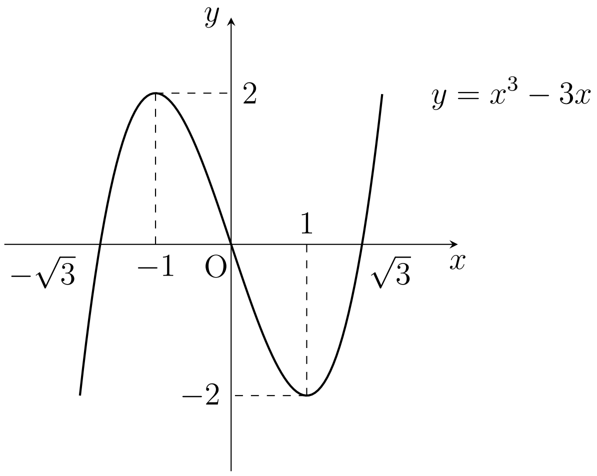
$\boxed{1}$ （解答例）

(1)　3 次関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

について，$a = 1,\ b = 0,\ c = -3,\ d = 0$ のとき，$y = x^3 - 3x$ のグラフは下図のようになる。



(2)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$f(x)$ は極値をもつので，$f'(x) = 0$ の異なる 2 つの実数解を α, β とおくと，2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$ が原点に対して対称なので，

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a} = 0 \quad (a \neq 0) \quad \text{より} \quad b = 0$$

である。さらに，$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ より

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= a\,(\alpha^3 + \beta^3) + b\,(\alpha^2 + \beta^2) + c\,(\alpha + \beta) + d \\ &= d = 0 \qquad (\,\alpha + \beta = 0,\ b = 0 \text{ を代入した}\,) \end{aligned}$$

よって，条件をみたす $f(x)$ は

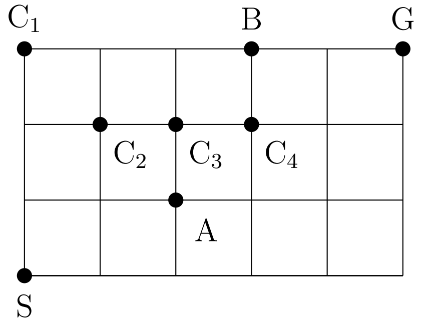
$$f(x) = ax^3 + cx \quad (a \neq 0)$$

と表せる。したがって，

$$f(-x) = -ax^3 - cx = -f(x)$$

より，極値が原点に関して対称であるとき，$y = f(x)$ のグラフも原点に関して対称であることが分かる。 □

$\boxed{2}$ （解答例）



(1)　道順 S → A の確率は

$$ {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} $$

(2)　道順 S → B の確率は，

〔1〕　S から C_1 を経由して B へ行く

〔2〕　S から C_2 を経由して，C_3, C_4 を経由せずに B へ行く

〔3〕　S から C_3 を経由して，C_4 を経由せずに B へ行く

〔4〕　S から C_4 を経由して B へ行く

4 つの場合の確率の和を求めれば良い。

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{21}{32} $$

(3)　道順 S → A → B の確率は，(1) の結果より

$$ \frac{3}{8} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\} = \frac{3}{16} $$

(4)　(1) から (3) の結果より，求める確率は

$$ 1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{21}{32} - \frac{3}{16} \right) = \frac{5}{32} $$

$\boxed{3}$ （解答例）

(1)　三角関数の性質と加法定理より，

$$\begin{aligned}\tan C &= \tan\{\pi - (A+B)\}\\ &= -\tan(A+B)\\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$$

これを整理すると，

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \quad \square$$

(2)　$A \leqq B \leqq C$ より，

$$\pi = A + B + C \geqq 3A \qquad \text{よって，}\quad 0 < A \leqq \frac{\pi}{3}$$

したがって，$\tan 0 < \tan A \leqq \tan\dfrac{\pi}{3}$ より，$0 < \tan A \leqq \sqrt{3}$ である。

(3)　(2) の結果より，$\tan A = 1$ となる。よって，(1) の結果より，

$$1 + \tan B + \tan C = \tan B \tan C$$

$$(\tan B - 1)(\tan C - 1) = 2$$

B, C は鋭角なので，$\tan B \leqq \tan C$ より，$\tan B = 2$, $\tan C = 3$ となる。以上より，

$$\tan A = 1, \quad \tan B = 2, \quad \tan C = 3$$