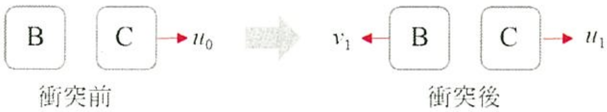
第 1 問

問 1 (1)

衝突前後における物体 B と物体 C の様子を図示すると，右図のようになる。反発係数の式より，



$1=-\frac{u_1-(-v_1)}{u_0-0}$　これより，$u_0=-(u_1+v_1)$

問 1 (2)

力学的エネルギー保存則より，

$$\boxed{\frac{1}{2}Mv_1^2}=\boxed{\frac{1}{2}kx^2}\ \text{これより，}\quad x=v_1\sqrt{\frac{M}{k}}$$

衝突直後の力学的エネルギー

最も縮んだときの力学的エネルギー

問 1 (3)

求める時間 T は物体 B の単振動の半周期に等しいので，

$$T=\frac{1}{2}\times 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}=\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

問 2 (1)，問 2 (2) 運動量保存則より，

$Mv_1=(M+2M)v_2$　これより，$v_2=\frac{1}{3}v_1$……(1) の答

また、力学的エネルギー保存則より，

$$\boxed{\frac{1}{2}Mv_1^2}=\frac{1}{2}(M+2M)v_2^2+\frac{1}{2}ky^2$$

衝突直後の力学的エネルギー

ばねの長さ最大のときの力学的エネルギー

求めた v_2 を代入して，

$$\frac{1}{\cancel{2}}Mv_1^2=\frac{3}{\cancel{2}}M(\frac{1}{3}v_1)^2+\frac{1}{\cancel{2}}ky^2$$

式変形して，

$\frac{2}{3}Mv_1^2=ky^2$　これより，$y=v_1\sqrt{\frac{2M}{3k}}$　……(2) の答

問 2(3)

ばねが再び自然長に戻ったときの物体 B の速度を V_B とする。運動量保存則・力学的エネルギー保存則より，

$Mv_1 = 2MV + MV_B$....①

$\cancel{\frac{1}{2}M}v_1^2 = \cancel{\frac{1}{2}}(2\cancel{M})V^2 + \cancel{\frac{1}{2}M}V_B^2$....②

① 式より、$V_B = v_1 - 2V$ これを②式へ代入して，

$v_1^2 = 2V^2 + (v_1 - 2V)^2$ これより， $V=0$，$\frac{2}{3}v_1$

$V=0$ は不適なので，$V = \frac{2}{3}v_1$ と求められる。

第2問・解答

問1

行程 1→2 は等温変化である。よって PV=一定が成立し，$P_2=P_1\times(V_1/V_2)=5P_1$ ■

また状態 1 の温度を T_1 とすれば，状態方程式より $T_1=\frac{P_1V_1}{mR}$。よって $T_2=T_1=\frac{P_1V_1}{mR}$ ■

問2

行程 2→3 は等積変化なので，$V_3=V_2=V_1/5$ ■

行程 3→1 は断熱変化で，PV^{κ}=一定だから，$P_3=P_1\times(V_1/V_3)^{\kappa}=5^{\kappa}P_1$ ■

状態方程式より，$T_3=\frac{P_3V_3}{mR}=5^{(\kappa-1)}\frac{P_1V_1}{mR}$ ■

問3

行程 2→3 は等積変化なので，外から加えられた熱量は

$Q_{23}=mc_V\ (T_3-T_2)\ =mc_V\left(5^{(\kappa-1)}-1\right)\frac{P_1V_1}{mR}=\left(5^{(\kappa-1)}-1\right)\frac{c_V}{R}P_1V_1$ ■

問4

行程 1→2 は等温圧縮であるから，外から仕事が加えられ，その分は全て熱として外に放出される．これより答は，出熱 ■

行程 1→2 で外から加えられた仕事の量は　$|W_{12}|=-\int_1^2 PdV=-\int_1^2 P_1V_1\frac{dV}{V}=-P_1V_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

$=-P_1V_1 ln\frac{1}{5}=P_1V_1 ln5$ ■ これが出熱量の絶対値となる．

第３問・解答

問１　小孔の面積と速度を乗ずれば体積流量となる．$\frac{\pi d^2 u}{4}$ ■

問２　タンク底面積に$-\frac{dh}{dt}$を乗ずれば微小時間当たりの体積減少量となる．$-\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt}$ ■

問３　題意より　$\frac{\pi d^2 u}{4} = -\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt}$

ベルヌーイの定理より$gh = \frac{u^2}{2}$. 変形して$u = \sqrt{2gh}$. これを上式に代入して整理すると

$d^2\sqrt{2gh} = -D^2\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{2gh}$ ■

問４　変数分離　$h^{-1/2}dh = -\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{2g}dt$

不定積分　$2h^{1/2} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{2g}t + C$　←Cは積分定数

初期条件　t=0　で　h=H より　$C = 2\sqrt{H}$　　これを代入して

$$\sqrt{h} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{\frac{g}{2}}t + \sqrt{H}$$ ■

問５　h= 0 を代入して

$\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{\frac{g}{2}}t = \sqrt{H}$

$t = \left(\frac{D}{d}\right)^2\sqrt{\frac{2H}{g}}$ ■